Tropische Kurven

Nathan Tiggemann *

03.02.2025

Dieser Text ist entstanden für den Mathezirkel der TU Darmstadt im Wintersemester 24/25. Er enthält mehr mathematische Inhalte als der Vortrag hatte. In der Theorie ist der Text auch ohne den Vortrag besucht zu haben verständlich, praktisch dürfte es erheblich schwieriger sein sich den Inhalt alleine anzueignen. Hinweise zu Fehlern und Typos gerne an die unten stehende Mailadresse.

Tropische Kurven und tropischer Satz von Bézout

Tropische Kurven sind das Analog zu klassischen Kurven, also Nullstellenmengen in der Ebene von Polynomen in zwei Variablen, in der tropischen Geometrie. Um die vermutlich erste aufkommende Frage zu klären: Der Ursprung des Namens „tropische Geometrie" ist recht langweilig – ursprünglich wurde das Adjektiv „tropisch" im Zusammenhang mit der „Max-Plus-Algebra" , die wir nachher die tropischen Zahlen nennen, zu Ehren des brasilianischen (in Ungarn geborenen) Mathematikers Imre Simon verwendet. Auch wenn die Ursprünge des Gebietes weiter zurück liegen, entstand tropische Geometrie als neue Entwicklung in der algebraischen und symplektischen Geometrie um das Jahr 2000. (Quelle)

Definition 1 (Tropische Zahlen)**.** Wir bezeichnen mit $\mathbb{T}$ die tropischen Zahlen. Die tropischen Zahlen sind als Menge die Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zusammen mit Minus Unendlich, notiert $-\infty$, wobei die Addition $\oplus$ gegeben ist durch $x \oplus y := \max\{x, y\}$ und die Multiplikation $\odot$ durch $x \odot y := x + y$.

Beispiel 2. Ein paar Beispiele und Anmerkungen.

- Es ist z.B. $1 \oplus 2 = 2$ und $1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$ und $-1 \oplus 0 = 0$
- Es ist z.B. $1 \odot 1 = 2$ und $-1 \odot 1 = 0$ und $2 \odot 0 = 2$
- Sowohl Assoziativität, Distributivität als auch Kommutativität gelten bezüglich $\oplus$ und $\odot$. Das heißt Terme können im Wesentlichen wie gewohnt umgeformt werden.
- Wir schreiben x^2 für $x \odot x$, x^3 für $x \odot x \odot x$ etc. Es sollte aus dem Kontext ersichtlich sein, wann eine tropische Potenz gemeint ist.
- Eine neue schöne Rechenregel, die für die reellen Zahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation *nicht* gilt, ist der „Freshman's dream":

$$(x \oplus y)^n = x^n \oplus y^n.$$

*email: tiggemann [at] mathematik.tu-darmstadt.de

Das heißt in der binomischen Formel fällt der gemischte Term weg: $(x \oplus y)^2 = x^2 \oplus y^2$. Überlege Dir wieso das gilt!

- Das neutrale Element bezüglich *Multiplikation* ist die 0: $a \odot 0 = a + 0 = 0$ für jedes a aus $\mathbb{T}$.
- Das neutrale Element bezüglich *Addition* ist $-\infty$: $a \oplus -\infty = \max\{a, -\infty\} = a$ für jedes a aus $\mathbb{T}$.
- Jede Zahl a außer $-\infty$ hat ein multiplikatives Inverses: $a \odot -a = a + (-a) = 0$.
- Es gibt keine additiven Inversen, d.h. z.B. gibt kein a in $\mathbb{T}$ für das gilt $a \oplus 5 = \max\{a, 5\} = -\infty$.

Definition 3 (Tropisches Polynom)**.** Ein tropisches Polynom (in zwei Variablen x, y) ist ein Ausdruck der Form

$$\max\{a_{i_1 j_1} + i_1 x + j_1 y, ..., a_{i_k j_k} + i_k x + j_k y\},$$

wobei jedes Paar (i_l, j_l) nur einmal vorkommt.
In der Schreibweise von oben kann man das auch schreiben als

$$a_{i_1 j_1} \odot x^{i_1} \odot y^{j_1} \oplus ... \oplus a_{i_k j_k} \odot x^{i_k} \odot y^{j_k}.$$

Wie im klassischen Fall, in dem wir z.B. $x^2 + 1$ anstatt $1 \cdot x^2 + 1$ schreiben, lassen wir für eine kürzere Schreibweise das multiplikativ-neutrale Element, im tropischen Fall also die Null, vor einem Monom oft einfach aus:

$$0 \odot x \oplus 0 \odot y \oplus 0 = x \oplus y \oplus 0.$$

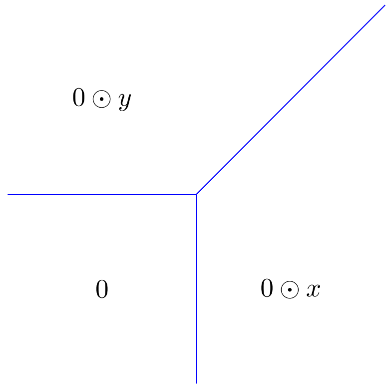
Beispiel 4. Hier ein paar Beispiele

- $F = 0 \odot x \oplus 0 \odot y \oplus 0 = x \oplus y \oplus 0 = \max\{x, y, 0\}$
- $F = -2 \odot x^2 \oplus x^1 y^1 \oplus x^1 \oplus -2 \odot y^2 \oplus y^1 \oplus -2 = \max\{-2 + 2x, x + y, x, -2 + 2y, y, -2\}$

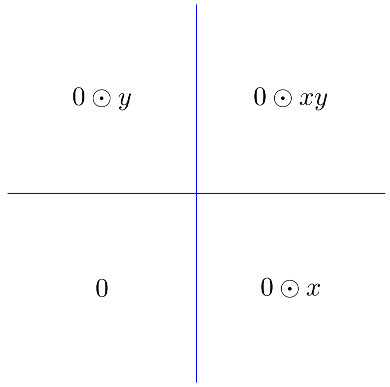
In der klassischen Algebra suchen wir nach Nullstellen von Polynomen, also Punkte für die $f(x) = 0$ gilt. Im tropischen Fall sieht die Definition von „Nullstelle“ etwas anders aus:

Definition 5 (Nullstelle eines tropischen Polynoms)**.** Gegeben ein tropisches Polynom F. Wir sagen, dass ein Punkt (a, b) eine Nullstelle von F ist, wenn für $x = a$ und $y = b$ zwei unterschiedliche der Einträge im Maximum den maximalen Wert haben.
Wir bezeichnen die Menge der Nullstellen von F mit $V(F)$.

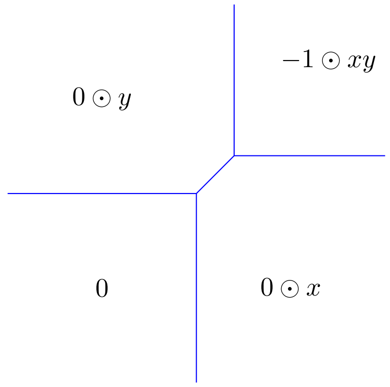
Beispiel 6. Hier ein erstes Beispiel - eine tropische Gerade, das heißt die Nullstellenmenge eines Polynoms vom Grad 1: $F = 0 \odot x \oplus 0 \odot y \oplus 0$.
Setzt man zum Beispiel den Punkt $(x, y) = (1, 1)$ ein, so wird das Maximum in $\max\{1, 1, 0\}$ zwei mal angenommen. Also ist $(1, 1)$ eine Nullstelle von F.
Zeichnet man alle Nullstellen ein, so erhält man folgendes Bild:



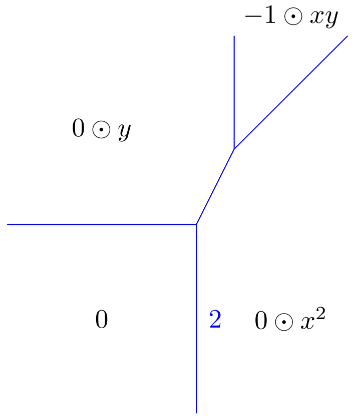
Der linke Strahl ergibt sich als die Menge der Punkte (x, y) mit $y = 0 \geq x$, der untere als die Menge der Punkte mit $x = 0 \geq y$ und der rechte als die Menge der Punkte mit $y = x \geq 0$.
In den Flächen, die die Nullstellenmenge ausschneidet sind die Monome notiert, die dort jeweils maximal sind.
Wenn wir das Polynom zu $0 \odot x \oplus 0 \odot y \oplus 0 \oplus xy$ abändern, sieht das Bild wie folgt aus:



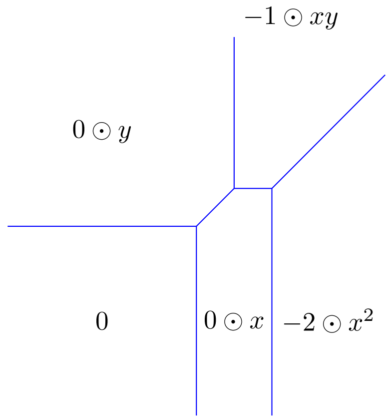
Wir stellen fest, dass der rechte obere Strahl durch die Fläche des xy-Monoms ersetzt wurde. Klarerweise ist das xy-Monom für positives x und y immer das Monom mit dem maximalen Wert. Wenn wir es für das xy-Monom „schwieriger“ machen wollen das Maximale zu sein, so müssen wir ihm einen negativen Koeffizienten mitgeben: $0 \odot x \oplus 0 \odot y \oplus 0 \oplus -1 \odot xy$. Das ergibt folgendes Bild:



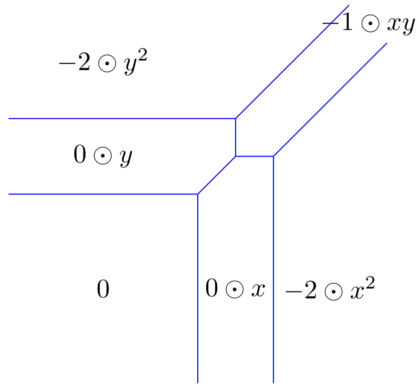
Bemerke wie sich die Fläche des $-1 \odot xy$-Monoms nach rechts oben verschiebt. Fügen wir ein $0 \odot x^2$ zum Polynom hinzu, so erhalten wir $0 \odot x \oplus 0 \odot y \oplus 0 \oplus -1 \odot xy \oplus x^2$ und das Bild



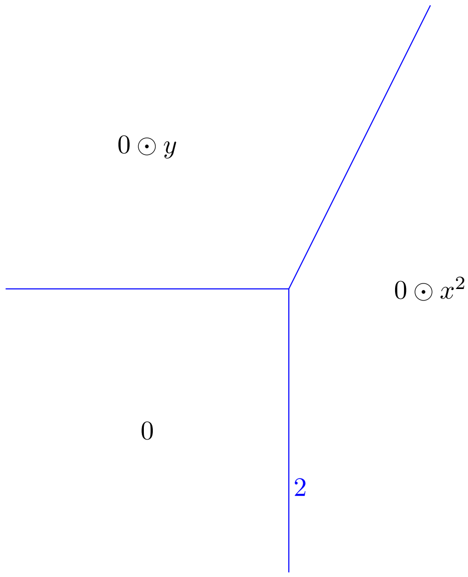
Wir sehen, dass das x^2-Monom sehr dominant ist und tatsächlich das x-Monom gar nicht mehr auftaucht. In einem gewissen Sinne ist dieses nicht-Auftauchen in der 2 am unteren Strahl gespeichert. Zur genaueren Definition wo diese Zahl her kommt, kommen wir nachher.
Wieder wollen wir das x^2-Monom weniger dominant machen indem wir ihm einen negativen Koeffizienten mitgeben: $0 \odot x \oplus 0 \odot y \oplus 0 \oplus -1 \odot xy \oplus -2 \odot x^2$



Nun sind alle Monome wieder „sichtbar“. Machen wir und den Spaß auch noch ein Monom $-2 \odot y^2$ hinzuzufügen erhalten wir das folgende Bild:



Beispiel 7. Für das Polynom $F = 0 \odot x^2y^0 \oplus 0 \odot x^1y^0 \oplus 0 \odot x^0y^1 \oplus 0 \odot x^0y^0$ erhalten wir



Was die 2 im Bild bedeutet, wird gleich erklärt.
Hier könnt ihr ein Programm (.exe (also für Windows), .apk (also für Android) und .py) zum Plotten von tropischen Kurven finden. Wie das Programm funktioniert wird dort erklärt.

Wir stellen fest: Nullstellenmengen von tropischen Polynomen sind Graphen in der Ebene, dem $\mathbb{R}^2$.

Bemerkung 8 (Was ist ein Graph)**.** Ein Graph besteht aus Knoten und Kanten. Hier heißt das: Die Strecken und Strahlen in den Bildern sind die Kanten, die Punkte an denen sich die Strecken treffen sind die Knoten.

Bemerkung 9 (Warum diese Definition)**.** Die tropische Definition einer Nullstelle wirkt auf den ersten Blick sehr komisch. Neben mehreren komplizierteren Gründen, die hier zu erklären den Rahmen sprengen würde, gibt es auch noch folgende Überlegung, die diese Definition motiviert:
Im klassischen Fall, wenn man ein Polynom gegeben hat und seine die Nullstellen kennt, kann man es in Linearfaktoren faktorisieren. Zum Beispiel ist

$x^2+x-2 = (x-(-2))(x-1)$ oder $2x^3-2x^2-16x+24 = 2(x-2)(x+-2)(x-(-3))$. Ähnlich funktioniert es für tropische Nullstellen von tropischen Polynomen in *einer* Variablen:

$$F = -2 \odot x^2 \oplus x \oplus 0$$

hat die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$. Und tatsächlich ist

$$-2 \odot (x \oplus 0) \odot (x \oplus 2) = -2 \odot x^2 \oplus x \oplus -2 \odot x \oplus 0 = -2 \odot x^2 \oplus x \oplus 0.$$

Eine schöne Eigenschaft tropischer Nullstellenmengen ist, dass sich sehr gut kombinatorisch untersuchen lassen. Dazu nutzt man das Konzept der Dual Subdivision.

Definition 10 (Newton Polygon - NP)**.** Das Newton Polygon $NP(F)$ ist die konvexe Hülle aller im Polynom vorkommenden Exponenten.

Auch wenn das Konzept der konvexen Hülle nicht bekannt ist, ist das kein Problem. In diesem Fall kann man die vorherige Definition einfach ignorieren und mit der nächsten arbeiten. Der Grund wieso sie dennoch hier steht, ist, dass der Name „Dual Subdivision“ in der nächsten Definition davon kommt, dass man das Newton Polygon unterteilt.

Definition 11 (Dual Subdivision - DS)**.** Zur Nullstellenmenge eines tropischen Polynoms F konstruieren wir die Dual Subdivision $DS(F)$ wie folgt:

1. Notiere zu jedem Monom $a_{ij} \odot x^i y^j$ den Punkt (i, j).

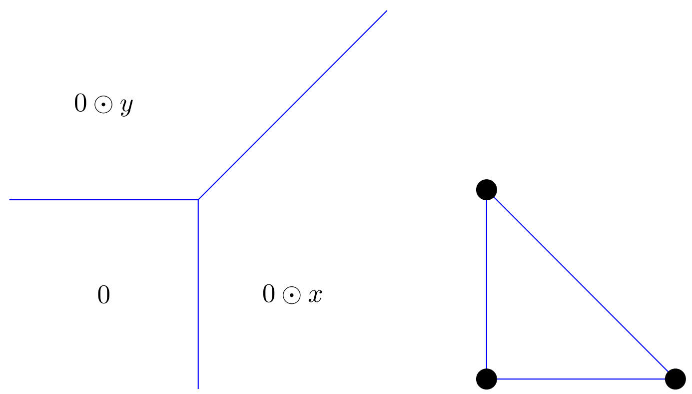
2. Für alle Paare von Punkten $(i, j), (k, l)$: Verbinde die Punkte, wenn die zu den Monomen $a_{ij} \odot x^i y^j$ und $a_{kl} \odot x^k y^l$ gehörenden Flächen eine Kante teilen mit einer Gerade.

Diese Konstruktion liefert uns insbesondere eine 1-zu-1-Korrespondenz zwischen den Kanten der Kurve und denen der Dual Subdivision.
Weiter gehört zu jedem Knoten der Kurve genau eine Fläche in der DS.

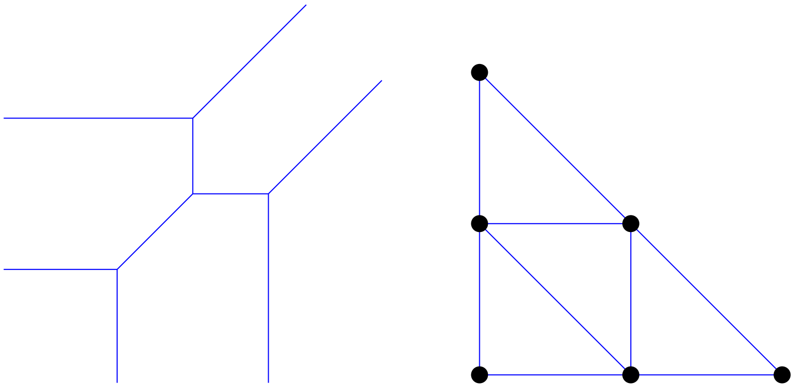
Bemerkung 12. Für die, die etwas mit Graphentheorie vertraut sind: Die DS ist sehr eng mit dem graphentheoretischen Dual verwandt, sie ist eine spezielle Art den Dualen Graphen zu zeichnen..

Bemerkung 13. Die Kanten der Nullstellenmenge sind immer orthogonal (d.h. im rechten Winkel) zu ihrer zugehörigen Kante in der DS. Kannst Du Dir überlegen wieso?

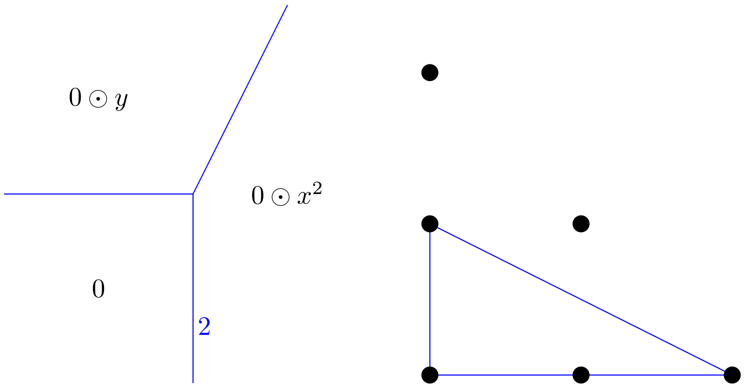
Beispiel 14. Zunächst für die tropische Gerade gegeben durch $F = 0 \odot x \oplus 0 \odot y \oplus 0$:



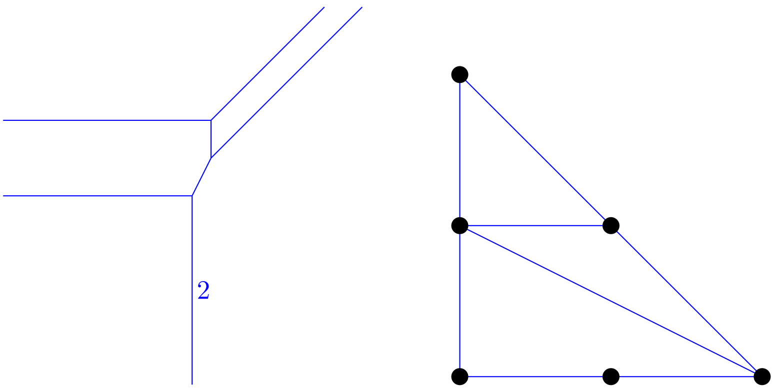
Auch für ein ähnliches Beispiel wie vorhin: $F = -2 \odot x^2y^0 \oplus 0 \odot x^1y^1 \oplus 0 \odot x^1y^0 \oplus -2 \odot x^0y^2 \oplus 0 \odot x^0y^1 \oplus -2 \odot x^0y^0$



Und noch das dritte Beispiel: $F = 0 \odot x^2y^0 \oplus 0 \odot x^1y^0 \oplus 0 \odot x^0y^1 \oplus 0 \odot x^0y^0$

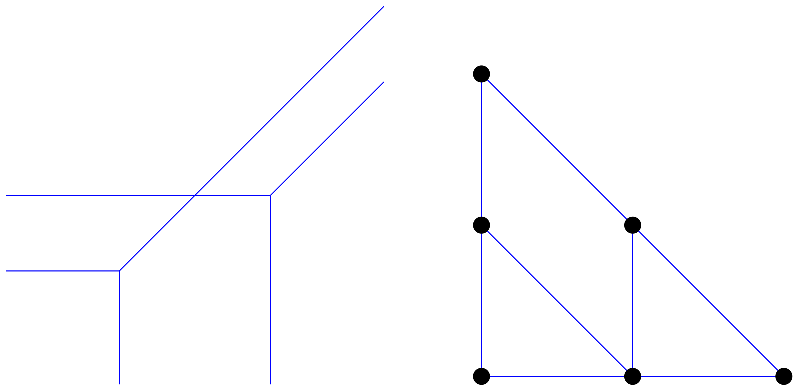


Noch ein weiteres Beispiel, hier ist $F = 0 \odot x^2y^0 \oplus -0.5 \odot x^1y^1 \oplus -2 \odot x^0y^2 \oplus 0 \odot x^0y^1 \oplus 0 \odot x^0y^0$

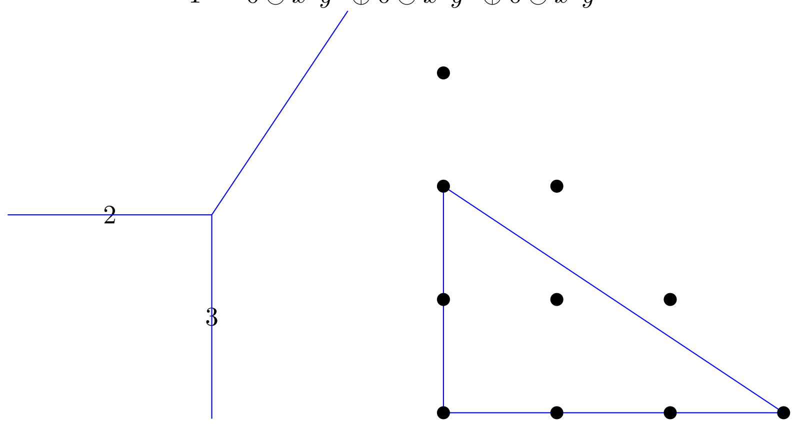


Beispiel 15. Hier ein paar Paare von Kurven mit ihrem Dual und einem definierenden Polynom.

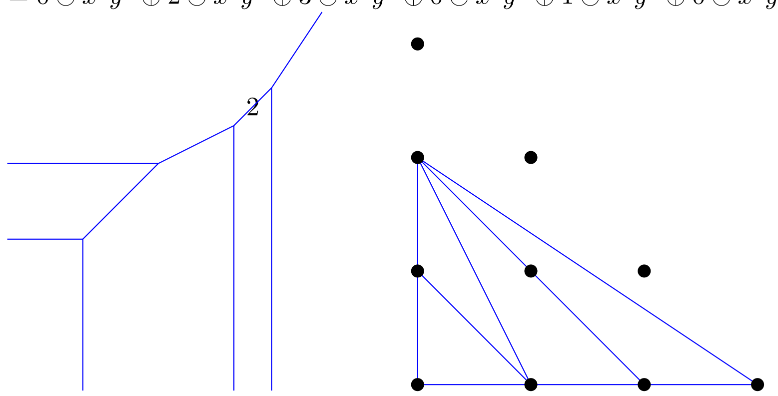
$$F = -2 \odot x^2y^0 \oplus 0 \odot x^1y^1 \oplus 0 \odot x^1y^0 \oplus 0 \odot x^0y^2 \oplus 0 \odot x^0y^1 \oplus -2 \odot x^0y^0$$



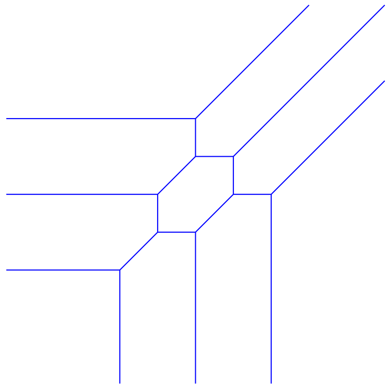
$$F = 0 \odot x^3y^0 \oplus 0 \odot x^0y^2 \oplus 0 \odot x^0y^0$$

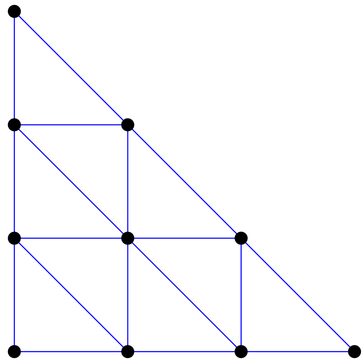


$$F = 0 \odot x^3y^0 \oplus 2 \odot x^2y^0 \oplus 3 \odot x^1y^0 \oplus 0 \odot x^0y^2 \oplus 1 \odot x^0y^1 \oplus 0 \odot x^0y^0$$

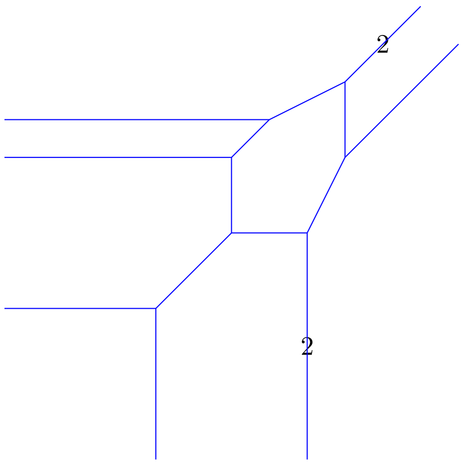


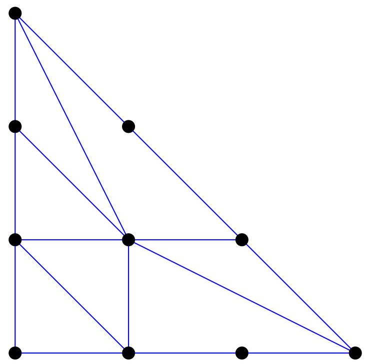
$$\begin{aligned} F = {} & -2 \odot x^3y^0 \oplus 0 \odot x^2y^1 \oplus 0 \odot x^2y^0 \oplus 0 \odot x^1y^2 \\ & \oplus 1 \odot x^1y^1 \oplus 0 \odot x^1y^0 \oplus -2 \odot x^0y^3 \oplus 0 \odot x^0y^2 \oplus 0 \odot x^0y^1 \oplus -2 \odot x^0y^0 \end{aligned}$$



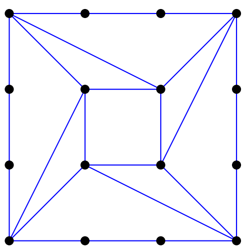


$$F = -4 \odot x^3y^0 \oplus -3 \odot x^2y^1 \oplus 0 \odot x^1y^1 \oplus 0 \odot x^1y^0 \oplus -5 \odot x^0y^3$$
$$\oplus -2 \odot x^0y^2 \oplus 0 \odot x^0y^1 \oplus -2 \odot x^0y^0$$





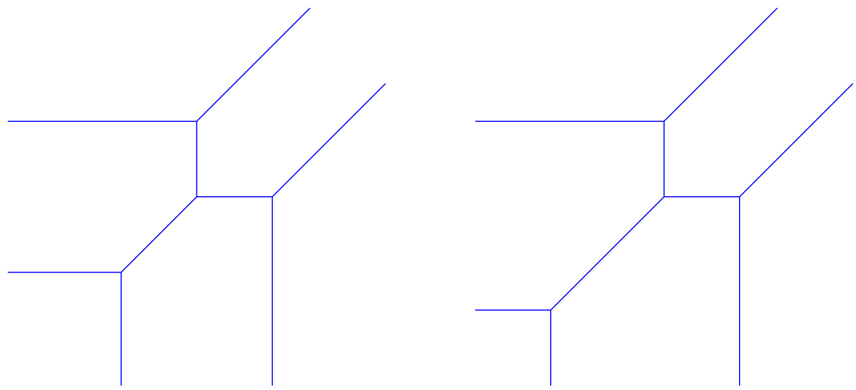
Bemerkung 16. Nicht zu jeder Unterteilung existiert eine duale Kurve. Zu dieser Unterteilung



gibt es keine tropische Kurve. Das sieht man vermutlich am einfachsten ein, wenn man mal versucht eine passende Kurve zu zeichnen.

Bemerkung 17. Die DS speichert nicht alle Informationen einer tropischen Nullstellenmenge. Einmal ist nicht klar wo im Raum die Menge liegt, verschieben ändert die DS nicht.

Weiter ist auch nicht klar welche Länge die Kanten der Nullstellenmenge haben. Die folgenden Nullstellenmengen haben die gleiche DS.



Definition 18. Zu jeder Kante einer tropischen Nullstellenmenge assoziieren wir ein „Gewicht“ wie folgt: Das Gewicht einer Kante ist die Anzahl ganzzahliger Punkte auf der dualen Gerade minus eins.

Wir notieren nur die Gewichte > 1 an den Kanten.
Nun kommen wir endlich zur Definition einer tropischen Kurve.

Definition 19. Eine *tropische Kurve* ist die Nullstellenmenge eines tropischen Polynoms in zwei Variablen zusammen mit den Gewichten ihrer Kanten.

Beispiel 20. Die tropischen Polynome $x \oplus y \oplus 0$ und $x^2 \oplus y^2 \oplus 0$ definieren die gleiche Nullstellenmenge aber nicht die gleiche tropische Kurve. Für das zweite Polynom hat jede Kante Gewicht zwei.

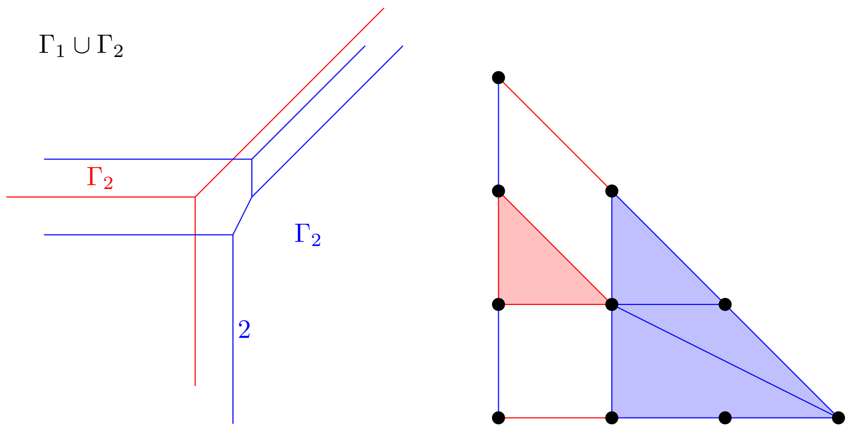
Bemerkung 21. Sei v ein Knoten einer tropischen Kurve und $e_1, ..., e_r$ die Kanten mit v als Startpunkt, $w_1, ..., w_r$ ihre Gewichte. Zu jeder Kante e_i gibt es genau einen ganzzahligen Vektor u_i, der in die Richtung der Kante, weg vom Knoten, zeigt und teilerfremde Einträge hat. Überlege Dir, dass stets

$$w_1 u_1 + ... + w_r u_r = 0$$

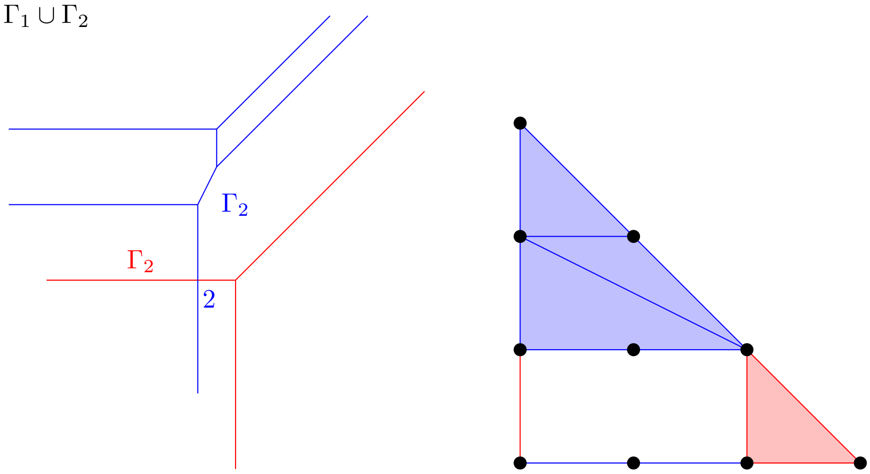
gilt. Man nennt diese Eigenschaft die *balancing condition* von tropischen Kurven.
Hinweis: Nutze die DS. Für dieses Aufgabe muss man wissen, was es für Vektoren im $\mathbb{R}^2$ heißt, orthogonal zu sein.
Man kann tropische Kurven auch über diese Eigenschaft definieren (mit noch ein paar mehr Eigenschaften.)

Wir wollen im Folgenden Schnitte von tropischen Kurven Γ_1, Γ_2 betrachten. Dazu zeichnen wir beide Kurven zusammen in ein Schaubild. Formal können wir die Menge $V(F \odot G)$ bestimmen, sie ist genau die Vereinigung der Mengen $V(F)$ und $V(G)$ (Warum?). Das rechtfertigt insbesondere das zeichnen einer DS. Wir bezeichnen die so entstandene tropische Kurve mit $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.
Wir werden im Folgenden immer eine Kurve blau und eine Kurve rot einzeichnen. Die Kanten der DS werden wir entsprechend färben: Korrespondiert sie zu einer der blauen Kurve, so färben wir sie blau und korrespondiert sie zu einer der roten Kurve, so färben wir sie rot.

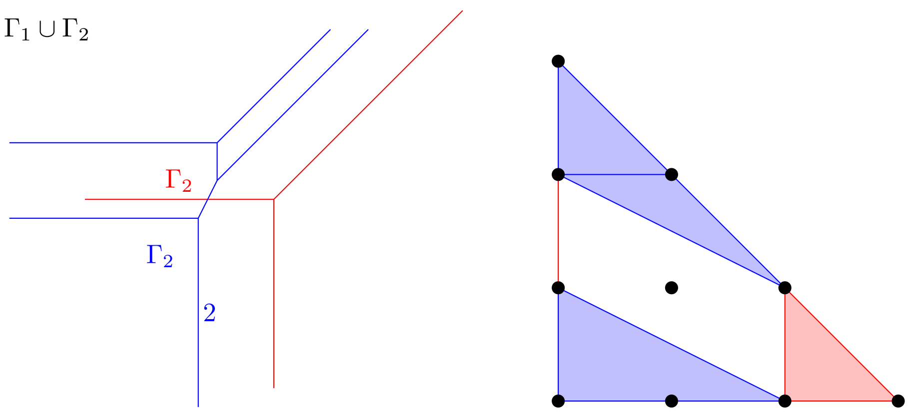
Beispiel 22. Wir betrachten Schnitte einer tropischen Gerade mit der letzten Kurve aus Beispiel 14
Hier ein schöner Fall:



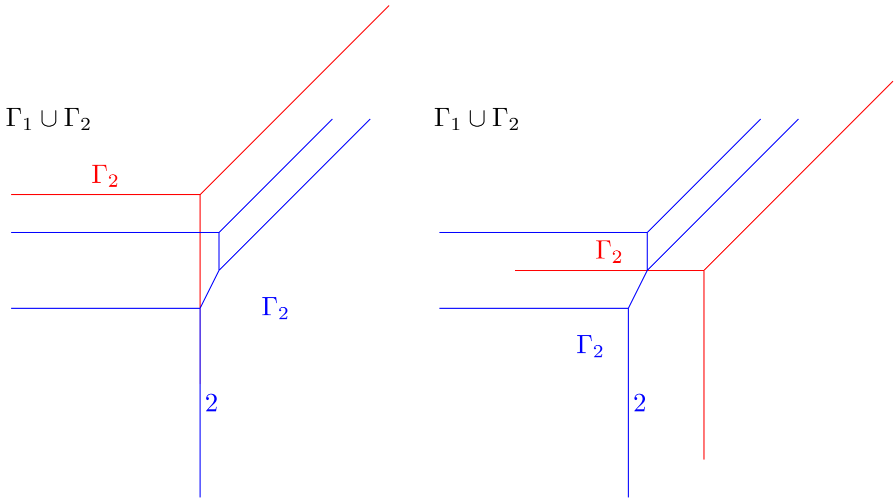
Und noch einer:



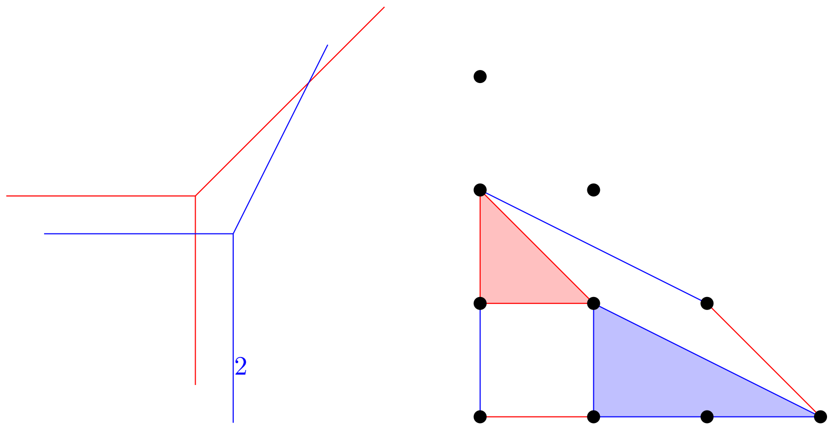
Und noch einer:



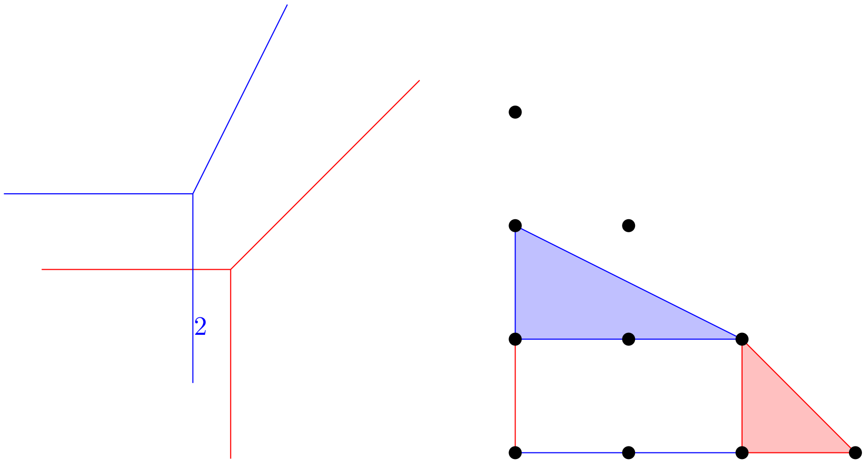
Es fällt auf, dass man die DS der roten und blauen Kurve in der DS der Vereinigung wiederfindet - wenn auch eventuell aufgeteilt.
Schnitte der folgenden Formen wollen wir nicht betrachten:



Beispiel 23. Noch eine andere Kurve, die mit einer tropischen Gerade geschnitten wird.



Und noch einer:



Wir sehen: Je nachdem wie die Kurven relativ zueinander liegen, haben sie unterschiedlich viele Schnittpunkte. Für den transversalen Fall, also dass kein Schnittpunkt ein Knoten einer der Kurven ist, können wir aber eine Invariante finden.
Eine Invariante ist hier eine Zahl, die nicht von der genauen Lage der Kurven abhängt.

Definition 24 (Schnittvielfachheit)**.** Für einen Schnittpunkt p zweier tropischer Kurven Γ_1, Γ_2 gegeben durch tropische Polynome F, G definieren wir seine Vielfachheit $\text{mult}_p(\Gamma_1, \Gamma_2)$ als den Flächeninhalt der zum Punkt dualen Fläche in der Dual Subdivision von $V(F \odot G)$.

Theorem 25 (Satz von Bézout)**.** *Zwei tropische Kurven Γ_1, Γ_2 in $\mathbb{R}^2$ mit NP δ_1, δ_2, schneiden sich im transversalen Fall immer in gleich vielen Punkten, gezählt mit Vielfachheit.*
Die Anzahl der Schnittpunkte ist

$$Area(\delta_1 + \delta_2) - Area(\delta_1) - Area(\delta_2),$$

wobei $\delta_1 + \delta_2$ das NP von $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ bezeichnet.

Das ist genau die Summe der Flächeninhalte aller Flächen definiert durch Kanten unterschiedlicher Farbe.

Beweis. Zunächst halten wir fest, dass das Verschieben einer tropischen Kurve um den Vektor (b, c) nur heißt, die Koeffizienten des Polynoms zu ändern: Für jedes Monom gilt $a_{ij} \odot (x - b)^i \odot (y - c)^j = \max\{a_{ij} + i(x - b) + j(x - c)\} = \max\{a_{ij} + ix - ib + jx - jc\} = (a_{ij} - ib - jc) \odot x^i \odot y^j$. Insbesondere bleiben also die vorkommenden Exponenten gleich und damit auch das NP von $F \odot G$, das wir im Satz mit $\delta_1 + \delta_2$ bezeichnet haben. Schon vorher hatten wir festgehalten, dass sich sogar die Dual Subdivision durch Verschieben nicht ändert, also bleiben δ_1 und δ_2 ebenso immer gleich.
Damit haben wir schon gezeigt, dass $Area(\delta_1 + \delta_2) - Area(\delta_1) - Area(\delta_2)$ nicht von der Lage der Kurven abhängt.
Das ist aber genau die Fläche, die von unterschiedlichfarbigen Kanten einbeschrieben wird - also genau die Summe der Vielfachheiten wie wir sie vorhin definiert haben. $\square$

Bemerkung 26. $\delta_1 + \delta_2$ meint eigentlich das allgemeinere Konzept der *Minkowski Summe*: Die Minkowski-Summe (nach Hermann Minkowski) zweier Teilmengen A und B des $\mathbb{R}^2$ ist die Menge, deren Elemente Summen von je einem Element aus A und einem Element aus B sind. (Wikipedia)

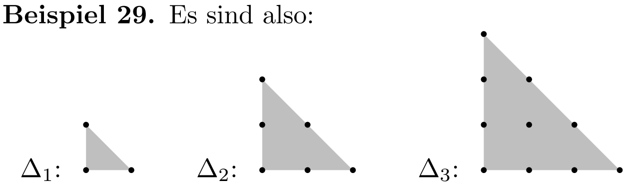
Bemerkung 27. Der nicht transversale Fall, also dass die Kurven unendlich viele Schnittpunkte haben oder sich in einem Knoten schneiden, ist tatsächlich auch kein unlösbares Problem. Die Idee ist, dass man eine der Kurven um einen kleinen Vektor $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ verschiebt, so dann man „im guten Fall" ist. Lässt man dann ε „klein werden", so bekommt man sogenannte stabile Schnittpunkte, denen man auch eine Vielfachheit zuweisen kann.
Was dabei nicht trivial ist, ist sich zu überlegen, dass so ein ε existiert und das der stabile Schnittpunkt und seine Vielfachheit nicht von der Wahl von ε abhängen.

Der klassische Bézout

In der klassischen Geometrie sieht der Satz von Bézout in der Regel etwas anders aus. Hier werden ein paar Definitionen eingeführt, mit denen man sehen kann, dass die obige Formulierung auch eine der klassischen Variante ähnlichere Version enthält.

Definition 28. Wir bezeichnen mit Δ_d die Punktemenge $\{(x,y) \mid x + y \leq d,\ x,y \geq 0\}$.

Beispiel 29. Es sind also:



Definition 30. Wir sagen, dass eine tropische Kurve Grad d hat, wenn ihr NP ein Δ_d ist.

Beispiel 31. Die Kurven aus Beispiel 22 haben Grad 2 bzw. 2. Von den Kurven aus Beispiel 14 hat die erste Grad 1, die zweite Grad 2. Der letzten Kurve weisen wir keinen Grad zu.

Bemerkung 32. Wir sagen, dass ein *Monom* $a_{ij} \odot x^i y^j$ Grad $i + j$ hat.
Eine tropische *Kurve* hat genau dann Grad d, wenn die Monome $a_{d0} \odot x^d y^0, a_{0d} \odot x^0 y^d$ im definierenden tropischen Polynom die Monome vom höchsten Grad sind und das konstante Monom $a_{00} \odot x^0 y^0$ im Polynom vorkommt.

Theorem 33 (Satz von Bézout)**.** *Seien Γ_1 und Γ_2 tropische Kurven vom Grad d_1, bzw. d_2 mit Schnittpunkten $p_1, ..., p_r$. Dann gilt:*

$$\mathrm{mult}_{p_1}(\Gamma_1, \Gamma_2) + ... + \mathrm{mult}_{p_r}(\Gamma_1, \Gamma_2) = d_1 \cdot d_2.$$

Beweis. Das folgt aus der vorherigen Version vom Satz von Bézout durch einsetzen der besonderen Newton Polygone. Das heißt, man muss nur $\delta_1 = \Delta_{d_1}$

und $\delta_2 = \Delta_{d_2}$ setzen. Dann ist automatisch $\delta_1 + \delta_2 = \Delta_{d_1+d_2}$ wie man leicht nachrechnet und die Formel ergibt sich durch folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} Area(\Delta_{d_1+d_2}) - Area(\Delta_{d_1}) - Area(\Delta_{d_2}) &= \frac{(d_1+d_2)^2}{2} - \frac{d_1^2}{2} - \frac{d_2^2}{2} \\ &= \frac{d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2}{2} - \frac{d_1^2}{2} - \frac{d_2^2}{2} \\ &= d_1 \cdot d_2 \end{aligned}$$

□